Лабораторная работа №2

Компьютерная алгебра – это раздел информатики и вычислительной техники.

Компьютерная алгебра - это аппаратные и/или программные инструментальные средства.

Система компьютерной алгебры (СКА, англ. computer algebra system, CAS) — это прикладная программа для символьных вычислений, то есть выполнения преобразований и работы с математическими выражениями в аналитической (символьной) форме.

Предмет компьютерной алгебры – символьные представления и аналитические преобразования математических объектов.

в компьютерных системах обработки информации.



Символьные представления математических объектов.

Язык термов

Произвольная совокупность попарно разных символов (букв) X = { x1, x2, ... , xn, ... } называется алфавитом. Конечная последовательность букв составляет слово

в алфавите X. С помощью пустого слова e ∈ X и операции конкатенации слов p и q (т.е. приписывании слова q непосредственно после последнего символа слова p) получим язык слов F(X).

Язык термов определяется индуктивно.

Алфавит языка термов состоит из трёх типов символов:

1) Предметные символы – T0 (буквы a, b, x, y, ... без индексов и с индексами)

2) Функциональные символы – F (буквы f, g, ... с верхними, обозначающими арность, и

нижними индексами. Если арность равна нулю, то можно не указывать

3) Символы-разделители – левая и правая круглые скобки, а также запятая.

Термами называют слова, построенные по следующим правилам:

1. Все символы из T0 – термы.

2.Еслиt1,...,tn –термы,тоfn (t1,...,tn)–терм(fn ∈F,n≥1)

3. Термами являются только те слова, которые определены правилами 1. и 2.

Алгебра термов

Множество всех термов в алфавите X сигнатуры Ω обозначим T (X, Ω).

Определим на множестве T (X, Ω) универсальную алгебру.

Пусть X = {x1, x2, ..., xn, ... } – некоторый алфавит, а Ω - множество операций. Представим множество Ω в следующем виде:

Ω = Ω’ ∪ Ω0, где Ω0 обозначает множество нульарных операций

(заметим, что арность f ∈ F в языке термов удовлетворяла условию n ≥ 1) Обозначим T (X, Ω’) множество термов, в котором T0 = X ∪ Ω0, а F = Ω’.

Таким образом, получили универсальную алгебру T (X, Ω’),

которую далее будем обозначать T (X, Ω) (имея в виду описанный выше переход) и называть алгеброй термов.

Пусть имеем произвольную алгебру G = (A, Ω) и алгебру термов T (X, Ω). Заметим, что алгебра G в общем случае может совпадать с T (X, Ω). Если Ω0 ≠ ∅, то пусть a (f) обозначает элемент из A,

который соответствует нульарной операции f из Ω0.

Рассмотрим отображение h : T0 → A такое, что h (f) = a (f) для f ∈ Ω0. Отображение h можно продлить на всю алгебру T (X, Ω), еслидляp1,p2,...,pn ∈T(X,Ω)иfn ∈Ω(n≥1)

положить h (f (p1, p2, ... , pn ) ) = f ( h ( p1 ), h ( p2 ), ... , h ( pn ) ). Отображение h называется интерпретацией T (X, Ω) на G.

Базовые объекты компьютерной алгебры

1. Целые числа
2. Рациональные числа
3. Полиномы от одной переменной
4. Полиномы от нескольких переменных
5. Рациональные функции

Представление целых чисел

Возможны различные способы представлений целых чисел: (1) ограниченной точности,

когда количество цифр в целом числе задано.

К таковым относятся все стандартные арифметики в языках программирования.

(2) произвольно заданной точности,

когда количество цифр в заданном числе можно менять, но только один раз – задавать перед вычислениями.

(3) неограниченной точности,

когда количество цифр в числе

не ограничивается никаким наперёд заданным числом, кроме ограничений, связанных с размером памяти машины.

В системах компьютерной алгебры целые числа неограниченной точности, реализуются программным путем, (этот тип данных считается базовым).

Представление рациональных чисел

Возможны различные способы представлений рациональных чисел произвольной точности:

(1) отношение числителя и знаменателя (оба - числа произвольной точности) (более точно, в виде записи, хранящей ссылку на список – числитель

и ссылку на список – знаменатель).

Такое представление является нормальным.

Проблема - для нормального представления необходимо распознавание идентичных чисел. Пример. Записи вида –2 / 3, 2 / -3, 4 / -6, -10 / 15 и т.п. представляют одно и то же число.

(2) Так же, как в (1), но выполнив дополнительные условия:

(а) числитель и знаменатель числа должны быть сокращены

на наибольший общий делитель (НОД);

(б) знаменатель должен быть положительным числом.

Такое представление является каноническим.

Проблема - требуется вычисление НОД двух целых чисел произвольной точности.

При большом количестве цифр в числах эта процедура является алгоритмически сложной. Тем более, её надо производить на одном из самых низких уровнях вычислений –

при каждом вычислении чисел.

Замечание. В системах компьютерной алгебры обычно используется каноническое представление рациональных чисел произвольной точности.

Представление полиномов от одной переменной

Полином от одной переменной представляет собой сумму мономов, иными словами – последовательность (или список).

Коэффициенты мономов могут быть числами разных типов, в том числе целыми числами произвольной точности.

(Степени переменных – короткие целые числа).

Представление полинома является каноническим, если последовательность мономов упорядочена по возрастанию (или по убыванию) степени мономов.

Полином можно хранить как в плотном, так и в разреженном представлении.

В плотном представлении хранится: число мономов (определяемое как максимальная степень старшего монома плюс единица), и все, в том числе, нулевые коэффициенты мономов. Такое представление эффективно для алгоритмов преобразования полиномов, в которых (1) число членов рядов для вычислений с повышением точности вычислений растет быстро и (2) мало число нулевых членов.

В разреженном представлении хранится последовательность (список), в каждом блоке которой хранится запись об одном ненулевом мономе, содержащая коэффициент монома и его степень.

Пример. Полином A (x) = x1000 - 1 требует существенно различные ресурсы при хранении в плотном и в разреженном представлениях.

Представление рациональных функций

Дробно-рациональные функции, представляющие отношение полиномов, эффективно хранить в виде записи, содержащей ссылку на полином - числитель и ссылку на полином – знаменатель. При этом полиномы должны находиться в одной канонической форме.

Представление рациональной функции будет каноническим, если дополнительно ввести следующие условия:

(1) числитель и знаменатель должны быть сокращены на полином – наибольший общий делитель (НОД) этих двух полиномов;

(2) числовые коэффициенты числителя и знаменателя должны быть сокращены на общий множитель; (3) старший коэффициент знаменателя должен быть положительным.

Поиск НОД для двух полиномов от нескольких переменных является вычислительно трудоемкой операцией.

Кроме того, она должна выполняться на низком уровне вычислений (т.е. очень часто).

Поэтому необходимо предусмотреть две формы представления дробно-рациональных функций: (1) каноническую и (2) нормальную (без сокращения на НОД).

Замечание. Как правило, в системах компьютерной алгебры реализуется несколько и канонических, и нормальных форм представления полиномов от нескольких переменных.

Алгебраические числа

и алгебраические функции

Алгебраическим называется число, являющееся решением уравнения: P(x)=0

где P ( x ) – полином от одной переменной с целыми коэффициентами.

Пример. Полином P ( x ) = x 2 – 2 порождает алгебраическое число √ 2.

Алгебраической называется функция, являющаяся решением уравнения: G(x)=0

где G ( x ) – порождающий полином от одной переменной с коэффициентами – полиномами от нескольких переменных с целыми коэффициентами.

Пример. Полином G ( x ) = x 2 – 2 + y порождает алгебраическую функцию √ (2 – y). Простым радикалом называется положительная дробная степень

от полинома с целыми коэффициентами.

Вложенным радикалом называется положительная дробная степень от выражения, содержащего радикалы.

Представление простых радикалов

Для представления простых радикалов необходимо ввести новую квазипеременную – r 1 , обозначающую этот радикал.

С помощью квазипеременной

описывается вхождение степеней простого радикала в другие выражения.

При этом необходимо учитывать,

что порождающий полином удовлетворяет условию: G ( r 1 ) = 0.

Для простых радикалов можно построить канонические представления, однако их редко применяют в системах компьютерной алгебры

по следующим причинам:

(1) алгоритмы получения таких представлений, как правило,

неэффективны и нерациональны;

(2) сами канонические представления не упрощают,

а усложняют вид выражений с радикалами, предъявляемый пользователю.

Для получения канонического представления простого радикала следует (после введения квазипеременной) разрешить следующие проблемы:

(1) Проблема неоднозначности дробно-рациональных отношений радикалов. Пример.Функции–радикалы(1-y)/(√(2-y) -1)и(√(2-y)+1)–это

два представления одного радикала. Их разность равна нулю.

(2) Проблема независимости радикалов друг от друга (в случае работы с несколькими радикалами).

Пример.Радикалыα=√(x+1),β=√(x+2)ирадикалχ=√(x2 +3\*x+2) взаимозависимы, т.к. разность (α \* β - χ) равна нулю.

(3) Проблема приведения дробно-рациональных функций к виду со знаменателями, свободными от радикалов.

Пример.Число–радикалследующеговида: 1/(√2+√3+√5+√7) предпочтительнее для пользователя,

чем его каноническое представление:

(22 √3 √5 √7 – 34 √2 √5 √7 – 50 √2 √3 √7 + 135 √7 + 62 √2 √3 √5 - 133 √5 - 145 √3 + 185 √2) / 215

Представление вложенных радикалов

Для вложенных радикалов

выбор канонического представления является еще более сложным, чем для простых радикалов.

Однако характер возникающих при этом задач сохраняется. Во-первых, необходимо ввести новые квазипеременные.

Во-вторых, необходимо решить те же проблемы (1) (2) (3), которые относятся к простым радикалам – см. предыдущий слайд.

Приведем примеры, которые иллюстрируют проблему (2) – проблему взаимной независимости вложенных радикалов.

Пример 1. Числа – вложенные радикалы. Имеем взаимозависимость: √ (5 + 2 √ 6) + √ (5 – 2 √ 6) = 2 √ 3

Пример 2. Функции – вложенные радикалы. Имеем взаимозависимость: √(x+√(x2 -1))=√((x+1)/2)+√((x-1)/2)

Представление алгебраических функций общего вида

Ключевая проблема построения канонического представления для алгебраических функций общего вида –

это проблема определения их взаимозависимости.

Существует два способа решения указанной проблемы:

(1) Факторизация порождающего полинома алгебраической функции

и анализ её результатов

(2) Построение примитивных элементов поля алгебраических функций.

Оба способа разрешения взаимозависимости рациональных функций вычислительно трудоёмки, поэтому в системах компьютерной алгебры канонические представления для алгебраических функций не применяются.

Замечание - Вывод. Существование теоретических алгоритмов разрешения проблем представления алгебраических функций не означает их практическую реализацию

1-й способ решения проблемы взаимозависимости

Если порождающий алгебраическую функцию полином неприводим,

т.е. не разложим на множители (полиномы с целыми коэффициентами),

то корни уравнения P (x) = 0 (алгебраические функции) независимы.

Таким образом, для поиска независимых алгебраических функций

необходимо решить задачу факторизации полинома от нескольких переменных. Более того, если у нас есть несколько порождающих полиномов,

возникает задача разложения полиномов на множители

над алгебраическими полями, что довольно сложно.

Т.е., если есть два неприводимых полинома P1 и P2 , это еще не значит,

что корни второго полинома не являются независимыми

в терминах корней первого полинома.

Пример. Пусть заданы два порождающих уравнения, неприводимых над полиномами с целыми коэффициентами: ЕслиP2 (β)=(β+α-1)\*h(β,α),гдеh–полином,

то алгебраические функции линейно зависимы.

P 1 (α) = 0 и P 2 (β) = 0.

2-й способ решения проблемы взаимозависимости

Примитивным элементом поля алгебраических функций (алгебраических чисел) называется алгебраическая функция (алгебраическое число),

с помощью которой можно выразить все остальные элементы такого поля.

Пример.Пустьчислоα–этокореньполинома(α4 –10\*α2 +1), который равен ( √2 + √3 ).

Тогда следующие числа: √2 = ( α 3 – 9 \* α ) / 2

√3=(11\*α–α3 )/2 можно выразить через него.

Представление матриц



Для представления матриц

обычно используется плотное представление

(т.е. хранятся все элементы матриц, включая нулевые).

В некоторых особых случаях для матриц специального вида (диагональных, ленточных и т.п.)

применяется разреженное представление.

Замечание. В случае использования разреженного представления требуются специальные алгоритмы преобразований матриц.